Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2024/2025
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 7 luglio 2025

1. (5 punti) Il Brasile gioca la finale del Campionato del Mondo. La probabilità che il Brasile vinca è 2/3. La probabilità che Pelè segni è 1/2. La probabilità che il Brasile vinca o che Pelè segni è 5/6. Dati i due eventi $A =$ "il Brasile vince" e $B =$ "Pelè segna" dire se sono indipendenti.

$$P(A) = \frac{2}{3} \quad ; \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(A)\,P(B)$$

Sono indipendenti

2. (5 punti) La probabilità che il tempo di vita di un dispositivo superi le 1000 ore è del 50%.

- Quanto vale la sua vita media?
- Quanto vale la probabilità che il tempo di vita del dispositivo superi le 2000 ore ?

$X =$ "tempo di vita"

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$P(X > 1000) = 1 - P(X \leq 1000) = e^{-1000\lambda}$$

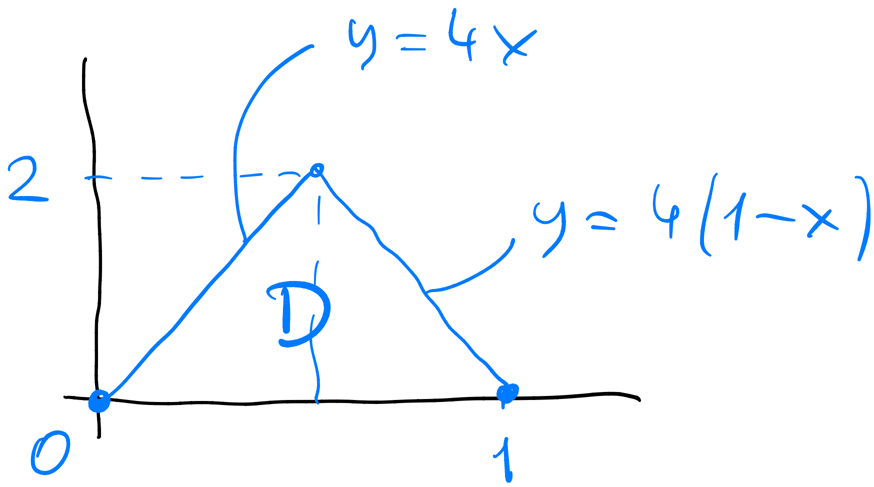
$$e^{-1000\lambda} = \frac{1}{2} \qquad 1000\lambda = \ln 2$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{1000} \simeq 0.000693$$

$$P(X > 2000) = 1 - P(X \leq 2000) = e^{-2000\lambda} =$$

$$= \left(e^{-1000\lambda}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

3. (5 punti) Una variabile continua X può assumere valori nell'intervallo $[0,1]$ con densità $f_X(x) = 4x$ per $x \in [0,1/2]$, $f_X(x) = 4(1-x)$ per $x \in [1/2,1]$ e $f_X(x) = 0$ altrimenti. Scrivere la funzione di ripartizione $F_X(t)$ e rappresentarla graficamente.



$$f(x) = \begin{cases} 4x & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 4(1-x) & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \quad \text{ok}$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x)\,dx$$

Per $t \le 0$: $F(t) = 0$

Per $0 \le t \le \frac{1}{2}$: $F(t) = \int_0^t 4x\,dx = 2t^2$

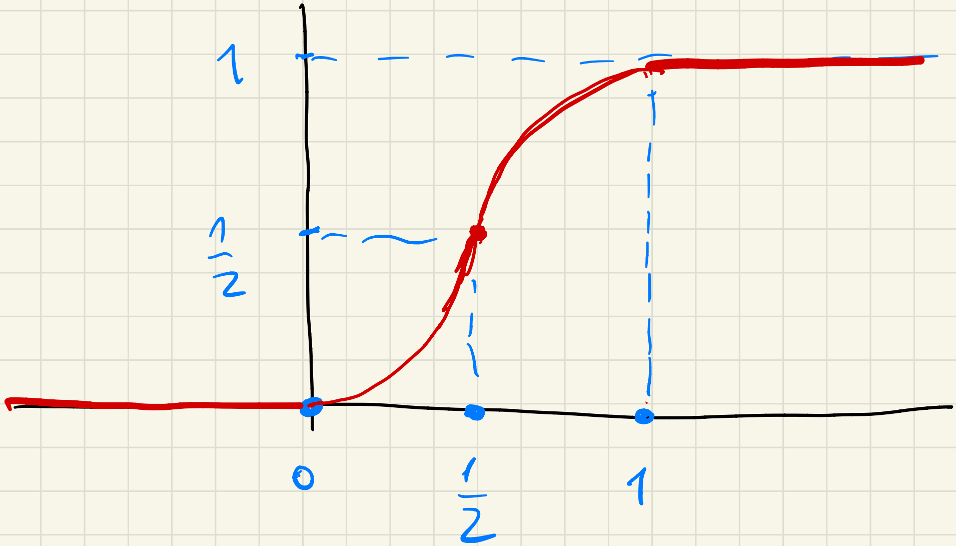
Per $t = \frac{1}{2}$ $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Per $\frac{1}{2} \le t \le 1$: $F(t) = F(\frac{1}{2}) + \int_{1/2}^t 4(1-x)\,dx =$

$$= \frac{1}{2} + 4\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1/2}^t = \frac{1}{2} + 4\left(t - \frac{t^2}{2}\right) -$$

$$- 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = -2t^2 + 4t - 1$$

Per $t \geq 1$: $F(t) = F(1) = 1$



1
1/2
0
1/2
1

4. (5 punti) Due variabili casuali X ed Y hanno densità congiunta uniforme sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sin x\}$$

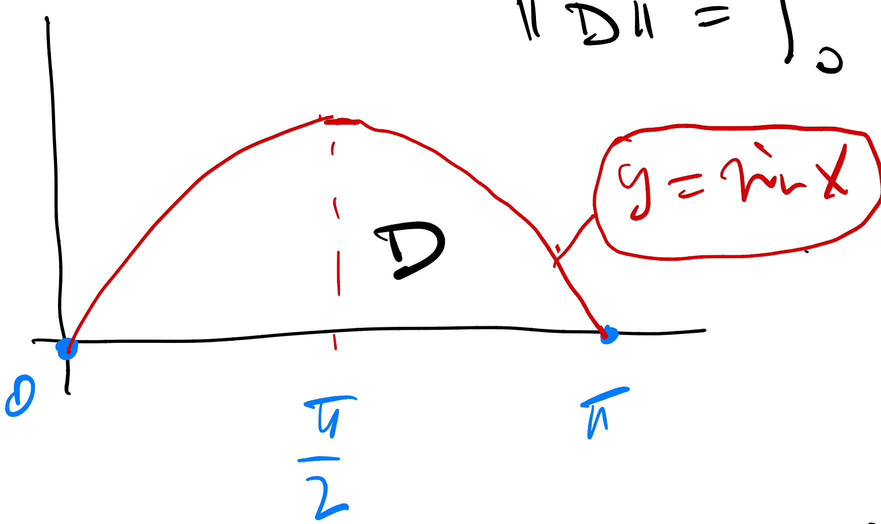
. Determinare

- il valore della densità;
- le densità marginali; X e Y sono indipendenti?

$$f(x,y) = \frac{1}{\|D\|} \quad \text{per } (x,y) \in D$$

$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

$$\|D\| = \int_0^\pi \sin x \, dx = 2$$



Inversa:

$x = \arcsin y \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$x = \pi - \arcsin y \qquad \frac{\pi}{2} \le x \le \pi$

Quindi

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy = \frac{1}{2}\sin x$$

$$0 \le x \le \pi$$

$$f_Y(y) = \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\,dx = \frac{\pi}{2} - \arcsin y$$

$$0 \le y \le 1$$

$$f_X(x)\, f_Y(y) \ne f(x,y)$$

5. (5 punti) Siano X e Y due variabili di Bernoulli, indipendenti, di parametri p_X e p_Y e tali che:

$$E[X\,Y] = \frac{21}{100}$$
$$E[X+Y] = 1$$

Determinare p_X e p_Y, medie e varianze delle due variabili e il coefficiente di correlazione.

$E[XY] = E[X]\,E[Y]$ perché indipendenti

$$\begin{cases} p_X\, p_Y = \frac{21}{100} \\ p_X + p_Y = 1 \end{cases} \qquad p_X = \frac{3}{10} \quad p_Y = \frac{7}{10}$$

o anche viceversa

$E[X] = \frac{3}{10}$ $\quad E[Y] = \frac{7}{10}$

$\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{10}\left(1 - \frac{3}{10}\right) = \frac{21}{100} = \mathrm{Var}(Y)$

$\rho = 0$ in quanto indipendenti

6. (5 punti) Si misura il carico massimo di 10 cavi d'acciaio con i seguenti risultati:

$$3.796, 3.320, 2.909, 2.992, 3.258, 2.584, 3.188, 3.107, 3.275, 2.566$$

Determinare gli intervalli di confidenza per la media con grado di fiducia del 90%, 95% e 99%.

$\bar{X}_n = 3.1$ $\quad S^2 = 0.133$

$t_{90}(9) = 1.833$ $\quad t_{95}(9) = 2.262$

$t_{99}(9) = 3.250$ $\quad \delta = t\sqrt{\frac{S^2}{n}}$

$\delta_{90} = 0.211$ $\quad I = (2.89, 3.31)$

$\delta_{95} = 0.261$ $\quad I = (2.84, 3.36)$

$\delta_{99} = 0.375$ $\quad I = (2.72, 3.47)$

7. (5 punti) Sia X la variabile che rappresenta una popolazione di media μ e varianza σ^2 e sia X_1, X_2, ..., X_n un suo campione di rango n. Si prendono in considerazione due stimatori, $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ per la stima della media di tale popolazione:

$$\hat{\theta}_1 = 6\,\frac{X_1 + 4\,X_2 + 9\,X_3 + ... + n^2\,X_n}{(n+1)^2\,(2\,n+1)} = 6\,\frac{\sum_{i=1}^{n} i^2\,X_i}{(n+1)^2\,(2\,n+1)}$$

$$\hat{\theta}_2 = 6\,\frac{X_1 + 4\,X_2 + 9\,X_3 + ... + n^2\,X_n}{n\,(n+1)\,(2\,n+1)} = 6\,\frac{\sum_{i=1}^{n} i^2\,X_i}{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}$$

Dire se i due stimatori sono distorti o meno e quale dei due è più efficace.

Sono date le due sommatorie:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2\,n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{30}\,n\,(n+1)\,(2\,n+1)\,(3\,n^2+3\,n-1) = \frac{3\,n^2+3\,n-1}{5}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$E[\hat{\theta}_1] = 6\,\frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{(n+1)^2\,(2n+1)}\,\mu = \frac{n}{n+1}\,\mu \quad \text{DISTORTO}$$

$$E[\hat{\theta}_2] = 6\,\frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{n\,(n+1)\,(2n+1)}\,\mu = \mu \quad \text{NON DISTORTO}$$

$$Var(\hat{\theta}_1) = Var\left(6\,\frac{\sum_{i=1}^{n} i^2\,X_i}{(n+1)^2\,(2n+1)}\right) =$$

$$= \frac{36}{(n+1)^4\,(2n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} Var(i^2\,X_i) =$$

$$= \frac{36}{(n+1)^4 (2n+1)^2} \sum_{i=1}^{n} i^4 \sigma^2 =$$

$$= \frac{36}{(n+1)^4 (2n+1)^2} \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)$$

$$(3n^2+3n-1) \sigma^2 =$$

$$= \frac{6}{5} \frac{n(3n^2+3n-1)}{(n+1)^3 (2n+1)} \sigma^2$$

$$Var(\hat{\theta}_2) = Var\left(6 \frac{\sum_{i=1}^{n} i^2 X_i}{n(n+1)(2n+1)} \right) =$$

$$= \frac{36}{n^2 (n+1)^2 (2n+1)^2} \sum_{i=1}^{n} Var(i^2 X_i) =$$

$$= \frac{36}{n^2(n+1)^2(2n+1)^2} \sum_{i=1}^{n} i^4 \sigma^2 =$$

$$= \frac{6}{5} \frac{3n^2+3n-1}{n(n+1)(2n+1)} \sigma^2$$

$$\frac{\operatorname{Var}(\hat{\theta}_1)}{\operatorname{Var}(\hat{\theta}_2)} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^3(2n+1)} =$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$$