Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2024/2025
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 4 giugno 2025

1. (5 punti) In una classe ci sono 20 femmine e 10 maschi. Delle femmine, 5 portano gli occhiali e dei maschi 3. Usando gli assiomi del calcolo delle probabilità, calcolare la probabilità che, scegliendo a caso una persona della classe, questa sia una femmina o abbia gli occhiali.

$F =$ "student femmine"

$M =$ "student maschio"

$O =$ "porta occhiali"

Dati: $P(F) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ $\qquad P(M) = \frac{1}{3}$

$P(O) = \frac{5+3}{30} = \frac{4}{15}$ $\qquad P(F \cap O) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

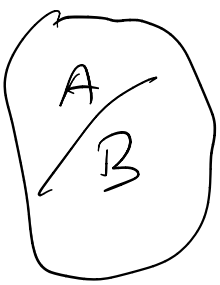
Si chiede: $P(F \cup O) = P(F) + P(O) - P(F \cap O) =$

$= \frac{2}{3} + \frac{4}{15} - \frac{1}{6} = \frac{20+8-5}{30} = \frac{23}{30}$

2. (5 punti) Un allenatore di pallacanestro deve scegliere i 5 giocatori da mettere in campo a partire da una rosa di 20. Di questi, 15 sono bravi giocatori, 5 sono scarsi; qual è la probabilità che,scegliendo a caso, nella squadra vi siano

- 2 giocatori scarsi?
- nessun giocatore bravo?
- al più un giocatore bravo?

È un esempio di legge ipergeometrica



n estrazioni, probabilità che k siano del tipo A

$n_A + n_B = N$

$$P(X=k) = \frac{\binom{n_A}{k}\binom{n_B}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Nel nostro caso:

$n_B = 15$ (bravi) $\qquad n=5$

$n_S = 5$ (scarsi) $\qquad N=20$

$X =$ "giocatori bravi su 5"

$Y =$ " " scarsi " "

$$\cdot\ P(Y=2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{15}{3}}{\binom{20}{5}} = \frac{2275}{7752} \approx 0.29$$

$$\cdot\ P(X=0) = \frac{\binom{15}{0}\binom{5}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{1}{15504} \approx$$

$$\approx 0,000064$$

$$\cdot\ P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) =$$

$$= \frac{1}{15504} + \frac{\binom{15}{1}\binom{5}{4}}{\binom{20}{5}} = \frac{1}{204} \approx$$

$$\approx 0,005$$

Lo svolgimento con le binomiali è <u>errato</u>. Comunque, ecco una possibile soluzione incorretta:

Sia X il numero di giocatori bravi nella squadra in campo e Y quelli scarsi. $Y = 5 - X$

$$X \sim B(n, p) \quad \text{con} \quad n = 5 \text{ e } p = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$Y \sim B(n, 1-p) \qquad \text{"} \qquad 1 - p = \frac{1}{4}$$

- $P(Y=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{135}{512} \approx 0.264$
- $P(X=0) = P(Y=5) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024} \approx 0.00097$
- $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) =$

$$= \binom{5}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \binom{5}{1}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4 =$$

$$= \frac{1}{64} \approx 0.0156$$

3. (5 punti) Una variabile discreta X può assumere i valori $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, con distribuzione discreta $(p, p, p, 3\,p, 3\,p, 3\,p)$. Dopo aver calcolato p, scrivere la funzione generatrice dei momenti $\phi_X(t)$ ed usarla per calcolare media e varianza. Verificare quindi che il risultato ottenuto sia consistente con il calcolo diretto.

$$1 = \sum_{i=1}^{6} p_i = 3p + 3(3p) = 12p \implies p = \frac{1}{12}$$

$$\phi_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{i=1}^{6} p_i \, e^{tx_i} =$$

$$= p\left(1 + e^{2t} + e^{4t}\right) + 3p\left(e^{6t} + e^{8t} + e^{10t}\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left[1 + e^{2t} + e^{4t} + 3\left(e^{6t} + e^{8t} + e^{10t}\right)\right]$$

$$\phi_X'(t) = \frac{1}{12}\left[2e^{2t} + 4e^{4t} + 3\left(6e^{6t} + 8e^{8t} + 10e^{10t}\right)\right]$$

$$\phi_X''(t) = \frac{1}{12}\left[4e^{2t} + 16e^{4t} + 3\left(36e^{6t} + 64e^{8t} + 100e^{10t}\right)\right]$$

$$\phi_X(0) = 1$$

$$\phi_X'(0) = E[X] = \frac{1}{12}\left(6 + 3 \cdot 24\right) = \frac{78}{12} = \frac{13}{2}$$

$$\phi''_X(0) = E[X^2] =$$

$$= \frac{1}{12}\left(20 + 3 \cdot 200\right) = \frac{620}{12} = \frac{155}{3}$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 =$$

$$= \frac{155}{3} - \frac{169}{4} = \frac{113}{12}$$

Verifica:

$$E[X] = \sum_i p_i x_i =$$

$$= \frac{1}{12}\left[0+2+4+3(6+8+10)\right] = \frac{13}{2}$$

$$E[X^2] = \sum_i p_i x_i^2 =$$

$$= \frac{1}{12}\left[0+4+16+3\left(36+64+100\right)\right] =$$

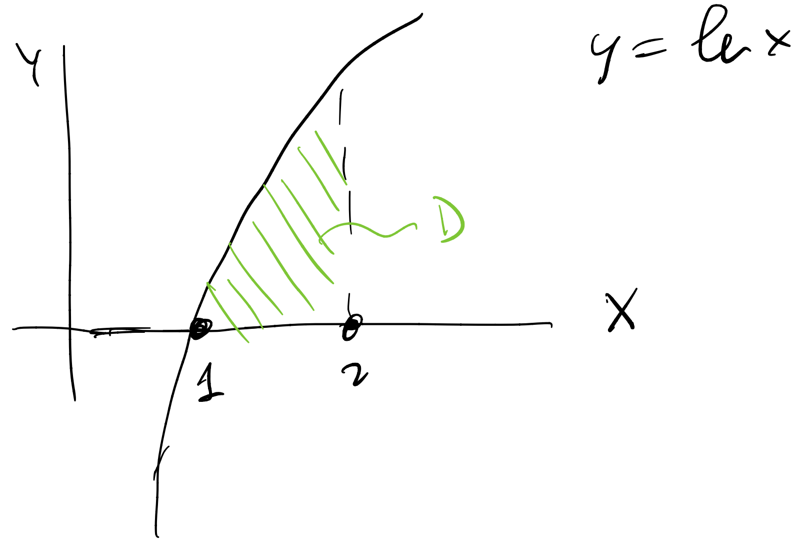
$$= \frac{1}{12}\left(20+600\right) = \frac{155}{3}$$

4. (5 punti) Due variabili casuali X ed Y hanno densità congiunta uniforme sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \ln x\}$$

. Determinare il valore della densità.

Dominio:



$$f(x,y) = C \qquad (x,y) \in D$$
$$= 0 \qquad \text{altrimenti}$$

con $C = \dfrac{1}{\|D\|}$

$$\|D\| = \int_1^2 \ln x \, dx = 2\ln 2 - 1$$

$$C = \frac{1}{2\ln 2 - 1}$$

5. (5 punti) Sia X una variabile di Bernoulli di parametro $p = 1/4$ e Y una variabile discreta che può assumere i valori -1, 0 e 1. Quando $X = 0$ allora $Y = -1$; quando $X = 1$ allora $Y = 0$ o $Y = 1$ con uguale probabilità. Si chiede di:

- determinare la distribuzione congiunta;
- determinare le distribuzioni marginali e dire se X e Y sono indipendenti o meno;
- calcolare medie e varianze di X e Y;
- calcolare il coefficiente di correlazione ρ_{XY}.

Dati

$X \in \{0, 1\}$ con $p = \frac{1}{4}$ e $1 - p = \frac{3}{4}$

$Y \in \{-1, 0, 1\}$ $\quad p_{ij} = P(X = i, Y = j) = ?$

$$P(Y = j \mid X = 0) = 1 \quad \text{se } j = -1$$
$$= 0 \quad \text{se } j = 0, 1$$

$$P(Y = j \mid X = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{se } j = 0, 1$$
$$= 0 \quad \text{se } j = -1$$

Ricordiamo che $P_{Y|X}(j \mid i) = \dfrac{P(X = i, Y = j)}{P(X = i)}$

e quindi

$$p_{ij} = P(X=i)\, P_{Y|X}(j|i)$$

Si ottiene la tabella

$X \backslash Y$	-1	0	1	Marginale X
0	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
Marginale Y	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Non sono indipendenti

$$E[X] = \frac{1}{4}$$

$$E[Y] = -\frac{3}{4} + \frac{1}{8} =$$

$$= -\frac{5}{8}$$

$$E[X^2] = \frac{1}{4}$$

$$E[Y^2] = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$Var(X) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$Var(Y) = \frac{7}{8} - \frac{25}{64} = \frac{31}{64}$$

$$E[XY] = \frac{1}{8}$$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{8} + \frac{5}{32} = \frac{9}{32}$$

$$\rho = \frac{9/32}{\sqrt{(3/16)(31/64)}} = 3\sqrt{\frac{3}{31}} = \frac{9}{\sqrt{93}}$$

6. (5 punti) Lucia legge, in media, 50 libri all'anno, con una deviazione standard di 5 libri. Si prefigge lo scopo di leggere 520 libri nei prossimi 10 anni. Qual è la probabilità che ci riesca?

X_i = numero libri nell'anno i-esimo

con $i = 1, \dots, n$ $\qquad n = 10$

$$P(X_1 + \dots + X_n \geq 520) =$$

$$= P\left(\sum X_i - n\mu \geq 520 - 500\right) =$$

$$= P\left(\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \geq \frac{20}{5\sqrt{10}}\right) \simeq P(Z \geq 1.265) =$$

$$= 1 - \Phi(1.265) = 1 - 0.8962 = 0.1038$$

7. (5 punti) Sia X la variabile che rappresenta una popolazione di media μ e varianza σ^2 e sia X_1, X_2, ..., X_n un suo campione di rango n. Si prendono in considerazione due stimatori, $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ per la stima della media di tale popolazione:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2\,n\,X_1 - a\,(X_2 + X_3 + ... + X_n)}{n} \qquad \hat{\theta}_2 = b\,\frac{X_1 + 2\,X_2 + 3\,X_3 + ... + n\,X_n}{n\,(n+1)}$$

dove a e b sono due parametri reali positivi. Determinare i parametri a e b in modo che i due stimatori non siano distorti.

Deve essere $E[\hat{\theta}_1] = E[\hat{\theta}_2] = \mu$

$$E[\hat{\theta}_1] = \frac{2n\mu - a(n-1)\mu}{n}$$

$$E[\hat{\theta}_2] = b\,\frac{1+2+3+\dots+n}{n(n+1)}\,\mu$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n\mu - a(n-1)\mu = n\mu \\ b\,\dfrac{\cancel{n(n+1)}}{2}\,\mu = \cancel{n(n+1)}\,\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = a(n-1) \\ \dfrac{b}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{n}{n-1} \\ b = 2 \end{cases}$$