# SIR: **S**uscettibili, **I**nfetti, **R**imossi, *un modello matematico di epidemie*.

Progetto Lauree Scientifiche

B.Cifra, L.Lamberti, S.Marone

Liceo Scientifico di Zagarolo

anno scolastico 2008-2009

# SIR

# SIR

1. Le piú comuni malattie infettive

1. Evoluzione di epidemie

# SIR

1. Le piú comuni malattie infettive
1. Evoluzione di epidemie
2. La probabilitá di contagio

# SIR

# SIR

1. Le piú comuni malattie infettive
1. Evoluzione di epidemie
2. La probabilitá di contagio
3. La probabilitá di guarigione
4. Il modello SIR

# SIR

# SIR

# Le piú comuni malattie infettive:

| | | | |
|---|---|---|---|
| AIDS | colera | epatite | febbre tifoide |
| leptospirosi | malaria | meningite | morbillo |
| parotite | pertosse | rosolia | salmonellosi |
| scarlattina | tetano | tubercolosi | varicella |

Wikipedia ISTAT

Le malattie infettive si contraggono

infettandosi,

cioé entrando in contatto con individui ammalati:

- dove non ci sono ammalati non c'é rischio di ammalarsi!
- non tutti, anche entrando in contatto con un ammalato si ammalano,
- cosa vuol dire entrare in contatto ?

## Giudizi, pregiudizi, strategie

**45**
*Il lebbroso, affetto da questa piaga, porterá le vesti strappate e il capo scoperto; si coprirá la barba e griderá: Impuro! Impuro!*

**46**
*Sará impuro tutto il tempo che avrá la piaga; impuro; se ne stará solo; abiterá fuori del campo.*

(Bibbia, **Levitico**)

## Giudizi, pregiudizi, strategie

*E fu questa pestilenza di maggior forza per ció che essa dagli infermi di quella per lo comunicare insieme s'avventava a'sani, non altramenti che faccia il fuoco alle cose secche o unte quando molto gli sono avvicinate.*
*E piú avanti ancora ebbe di male: ché non solamente il parlare e l'usare cogli infermi dava a'sani infermitá o cagione di comune morte, ma ancora il toccare i panni o qualunque altra cosa da quegli infermi stata tocca o adoperata pareva seco quella cotale infermitá nel toccator transportare.*

(G.Boccaccio, **Decamerone**, Introduzione alla prima giornata.)

## Giudizi, pregiudizi, strategie

*Temeva di piú, che, se pur c'era di questi untori, la processione fosse un'occasion troppo comoda al delitto: se non ce n'era, il radunarsi tanta gente non poteva che spander sempre piú il contagio: pericolo ben piú reale*

*Da quel giorno, la furia del contagio andó sempre crescendo: in poco tempo, non ci fu quasi piú casa che non fosse toccata: in poco tempo la popolazione del lazzeretto, al dir del Somaglia citato di sopra, montó da duemila a dodici mila: piú tardi, al dir di quasi tutti, arrivó fino a sedici mila.*

(A.Manzoni, **I Promessi Sposi**, cap.XXXII )

Alcune malattie infettive sono immunizzanti, altre no:

- immunizzanti vuol dire che si possono prendere una volta sola,
- quelle non immunizzanti si possono prendere e riprendere piú volte.

Il morbillo é (credo) immunizzante, il raffreddore non é immunizzante.

Alcune malattie infettive sono immunizzanti, altre no:

- immunizzanti vuol dire che si possono prendere una volta sola,
- quelle non immunizzanti si possono prendere e riprendere piú volte.

Il morbillo é (credo) immunizzante, il raffreddore non é immunizzante.

I modelli matematici di trasmissione delle malattie infettive fanno uso:

- di matematica,
- di probabilitá,
- di statistica.

Ci occupiamo solo di malattie immunizzanti.

Si parla di epidemia quando una malattia infettiva si diffonde ad un ritmo...

....preoccupante !

Si parla di epidemia quando una malattia infettiva si diffonde ad un ritmo...

....preoccupante !

Durante un'epidemia la popolazione puó essere suddivisa in tre classi

- gli individui sani , $S(t)$ suscettibili di essere contagiati,
- gli ammalati $I(t)$, cioé gli infetti, che sono a loro volta veicolo dell'infezione,
- i guariti (o deceduti) $R(t)$, e quindi immunizzati, detti rimossi.

Si parla di epidemia quando una malattia infettiva si diffonde ad un ritmo...

....preoccupante !

Durante un'epidemia la popolazione puó essere suddivisa in tre classi

- gli individui sani , $S(t)$ suscettibili di essere contagiati,
- gli ammalati $I(t)$, cioé gli infetti, che sono a loro volta veicolo dell'infezione,
- i guariti (o deceduti) $R(t)$, e quindi immunizzati, detti rimossi.

Le iniziali $S \quad I \quad R$ attribuiscono al modello il nome **SIR**.

Il termine

Suscettibili

in luogo di

Sani

corrisponde alla possibilitá o meno di contrarre la malattia: i Sani infatti potrebbero essere vaccinati e quindi insensibili al contagio. É noto infatti come la politica delle vaccinazioni sia uno degli strumenti fondamentali nel controllo, nella limitazione, delle epidemie.

Detta $N$ la numerositá della popolazione, costante (trascurando cioé nascite e morti naturali) durante il periodo interessato dall'epidemia, le tre variabili $S, I, R$ variano nel tempo rispettando per ogni $t \geq 0$ il vincolo

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

- $S(t)$ non puó che avere un andamento decrescente: mano mano molti sani vengono contagiati e vanno ad aumentare il numero $I(t)$ degli infetti,
- $I(t)$ numero degli infetti puó aumentare in un primo periodo e (ci si augura) diminuire con l'avviarsi dell'epidemia a conclusione,
- $R(t)$, numero dei rimossi, non puó che aumentare,

$$0 \leq R(t) \leq N$$

I numeri dei Suscettibili, degli Infetti e dei Rimossi variano nel tempo: si puó pensare a un loro bollettino settimanale o giornaliero,

- il primo giorno $S_1, \quad I_1, \quad R_1$
- il secondo giorno $S_2, \quad I_2, \quad R_2$
- l'$n-$esimo giorno $S_n, \quad I_n, \quad R_n$
- ecc. ecc.

## Norme seguite dal Servizio Sanitario Nazionale

Ministero della Salute

*Per stimare l'impatto della pandemia é necessario inoltre rilevare i seguenti indicatori:*

- *numero settimanale di ricoveri ospedalieri per quadri clinici*
- *numero settimanale di ricoveri ospedalieri per sindrome influenzale esitati in decesso*
- *numero settimanale di decessi totali su un campione di comuni*
- *monitoraggio sentinella dell'assenteismo lavorativo e scolastico.*

# EPIDEMIOLOGIA


## Come valutare le differenze

$$\triangle S = S_2 - S_1 \quad \triangle I = I_2 - I_1 \quad \triangle R = R_2 - R_1 \quad ?$$

Costruire un modello significa proporre delle relazioni tra:

$$\triangle S, \ \triangle I, \ \triangle R, \ S_1, \ I_1, \ R_1$$

che consentano di avanzare previsioni sull'evoluzione della malattia anche per organizzare una strategia sanitaria.

# La probabilitá di contagio

## La probabilitá di contagio

- $S_2 - S_1$ sembra essere ragionevolmente proporzionale a $I_1$
- $I_2 - I_1$ sembra essere ragionevolmente proporzionale a $I_1$
- il fattore di proporzionalitá dipende certamente anche dal numero di suscettibili $S_1$

# La probabilitá di contagio

Gli incontri: supponendo che ogni giorno ogni individuo ne incontri mediamente un altro, $N$ individui producono

$$\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$$

incontri.

# La probabilitá di contagio

Gli incontri: supponendo che ogni giorno ogni individuo ne incontri mediamente un altro, $N$ individui producono

$$\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$$

incontri.

Un incontro puó produrre un nuovo malato solo se ad incontrarsi sono un suscettibile e un infetto.

# La probabilitá di contagio

Se $S_1$ sono i suscettibili e $I_1$ gli infetti essi producono $S_1 \cdot I_1$ incontri.

# La probabilitá di contagio

Se $S_1$ sono i suscettibili e $I_1$ gli infetti essi producono $S_1 \, . \, I_1$ incontri.

La probabilitá per ciascun individuo di avere un incontro a rischio é pertanto il quoziente

$$\frac{2\, S_1 \, . \, I_1}{N(N-1)}$$

## Esempio

*sia* $N = 5,\ S_1 = 3,\ \ I_1 = 2$

- $A$, $B$, $C$ *suscettibili,*
- $\delta$, $\varepsilon$ *infetti.*

*Incontri possibili*

$$AB,\ AC,\ A\delta, A\varepsilon,\ BC,\ B\delta,\ B\varepsilon,\ C\delta,\ C\varepsilon,\ \delta\varepsilon$$

*É evidente che dei* 10 *incontri possibili la percentuale di quelli a rischio é*

$$\frac{6}{10} = \frac{2 \times S_1 \times I_1}{N(N-1)}$$

... da un incontro a rischio a un contagio:

detta $\beta_0$ la probabilitá che da un incontro a rischio derivi un contagio la probabilitá per ciascun individuo di subire il contagio é quindi

$$\beta_0 \, \frac{2\, S_1 \, . \, I_1}{N(N-1)}$$

Dagli $N$ individui ci si aspettano pertanto, in un giorno,

$$\beta_0 \, \frac{2\, S_1 \, . \, I_1}{N(N-1)} \, N$$

nuovi contagi.

Se il primo giorno c'erano $S_1$ individui suscettibili, il secondo giorno ce ne saranno

$$S_2 = S_1 - \gamma \, S_1 \, I_1, \qquad \gamma = \beta_0 \, \frac{2}{N-1}$$

# La probabilitá di guarigione

Una percentuale $q$ degli infetti guarisce ogni giorno:

# La probabilitá di guarigione

Una percentuale $q$ degli infetti guarisce ogni giorno:
ad esempio assumere $q = 0.20$ significa dire che .... il 20 % degli attuali infetti $I_n$ del giorno $n$ risultano guariti, cioé rimossi, il giorno dopo.

# La probabilitá di guarigione

Riesce pertanto, bilanciando nuovi ammalati con malati guariti,

$$I_2 - I_1 = \gamma\, S_1\, I_1 - q\, I_1$$

Naturalmente i malati guariti vanno ad aggiungersi ai rimossi

$$R_2 - R_1 = q\, I_1$$

**La probabilitá di guarigione** ovvero di dismissione ospedaliera corrisponde alla durata di malattia (prima di uno dei due esiti possibili). Un ammalato ha, ogni giorno la probabilitá $q$ di guarire:

$$I(t+1) - I(t) = -q\,I(t)$$

La seguente tabella riporta a sinistra il giorno della dismissione e a destra la sua probabilitá:

| giorno | probabilitá |
|---|---|
| 1 | $q$ |
| 2 | $(1-q)q$ |
| 3 | $(1-q)^2 q$ |
| 4 | $(1-q)^3 q$ |
| k | $(1-q)^{k-1} q$ |

# Stimare $q$

La durata media attesa per la dismissione é pertanto

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k\,(1-q)^{k-1} q = q \sum_{k=0}^{\infty} k\,(1-q)^{k-1} = q \left( \sum_{k=0}^{\infty} (1-q)^k \right)' =$$

$$= q \left( \frac{1}{(1-(1-q))^2} \right) = \frac{1}{q}$$

Se statisticamente la durata della malattia é $T$ giorni allora

$$\mu = T \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{q} \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{T}$$

# Stimare $q$

Un modo piú intuitivo di legare il coefficiente $q$ alla durata $T$ mediamente prevedibile della malattia é il seguente:

- Ammettiamo, per esempio, che la malattia duri $T = 3$ giorni,
- il primo giorno guariscono $q\,I$ fortunati,
- il secondo altri $q\,I$ un po' meno fortunati,
- il terzo giorno altri $q\,I$.

Avendo ammesso che la durata attesa della malattia é $T = 3$ giorni deve riuscire

$$q\,I + q\,I + q\,I = I \quad \rightarrow \quad 3\,q = 1 \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{T}$$

$\boxed{\textbf{La contabilitá dei rimossi}}$

In un certo senso si tratta di una contabilitá banale: inizialmente, per $t = 0$ il numero $R(0)$ sará 0, successivamente, ogni giorno riesce

$$R_n = N - S_n - I_n$$

# La forma nel discreto:

**Il modello SIR:**

$$\begin{cases} S_{n+1} &= S_n - \gamma I_n S_n \\ I_{n+1} &= I_n + \gamma I_n S_n - q I_n \\ R_{n+1} &= R_n + q I_n \end{cases}$$

# La forma nel continuo:

$$S_n,\ I_n,\ R_n \quad \rightarrow \quad S(t),\ I(t),\ R(t)$$

da cui:

$$\begin{cases} S(t+\triangle t) - S(t) = -\gamma S(t)\, I(t)\, \triangle t \\ \\ I(t+\triangle t) - I(t) = (\gamma S(t)\, I(t) - q\, I(t))\, \triangle t \\ \\ R(t+\triangle t) - R(t) = q\, I(t)\, \triangle t \end{cases}$$

## La forma nel continuo:

da cui dividendo membro a membro per $\triangle t$ si ha

$$\begin{cases} \dfrac{S(t+\triangle t)-S(t)}{\triangle t} = -\gamma S(t)\, I(t) \\[2ex] \dfrac{I(t+\triangle t)-I(t)}{\triangle t} = (\gamma S(t)\, I(t) - q\, I(t)) \\[2ex] \dfrac{R(t+\triangle t)-R(t)}{\triangle t} = q\, I(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\gamma S\, I \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \gamma S\, I - q\, I \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} = q\, I \end{cases}$$

# Effetto soglia

**Indagine qualitativa:**

$$I_{n+1} = I_n + \gamma(S_n - \frac{q}{\gamma})I_n$$

Il numero degli infetti

- aumenta di giorno in giorno se $S_n > \dfrac{q}{\gamma}$
- diminuisce di giorno in giorno se $S_n < \dfrac{q}{\gamma}$

Il valore

$$\frac{q}{\gamma}$$

rappresenta una soglia nello sviluppo dell'epidemia !

# Effetto soglia

Tenuto conto che il numero dei suscettibili $S_n$ diminuisce al passare del tempo, prima o poi esso finirá sotto il valore soglia

$$\frac{q}{\gamma}$$

e il numero di ammalati comincerá a calare.
L'epidemia tenderá ad estinguersi.

**Problema:**

Tutti i suscettibili finiranno comunque, prima o poi per ammalarsi o una parte di essi sfuggirá al contagio ?
In altri termini

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \begin{cases} 0 \\ \\ S_\infty > 0 \end{cases} \qquad ?$$

# Strategie sanitarie

**Per contenere i danni di un'epidemia si puó:**

- Tenere basso il numero $S_0$ dei suscettibili:
  - vaccinazioni di massa.
- Tenere alta la soglia $\dfrac{q}{\gamma}$
  - tenere alto $q$: miglioramento delle terapie,
  - tenere basso $\gamma$: educazione igenico sanitaria.
- Predisporre un numero di posti letto $S_0 - S_\infty$ adeguato.

# Esempio:

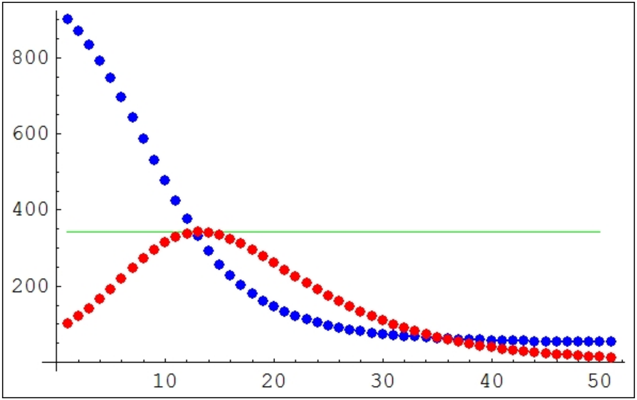


Figura: $N = 1000, \; S_0 = 900, \; I_0 = 100, \gamma = 0.00035, \; q = 0.12$

# Esempio:

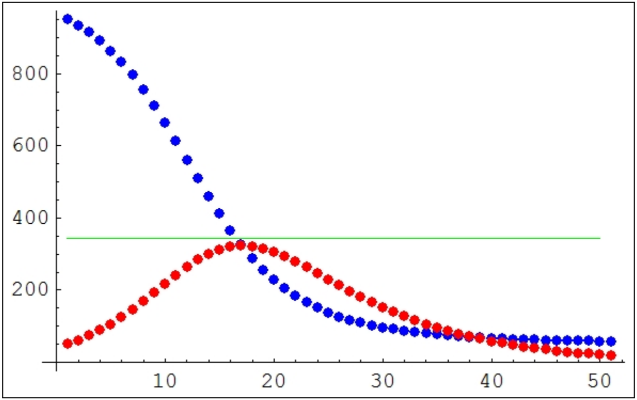


Figura: $N = 1000, \; S_0 = 950, \; I_0 = 50, \gamma = 0.00035, \; q = 0.12$

# Esempio:

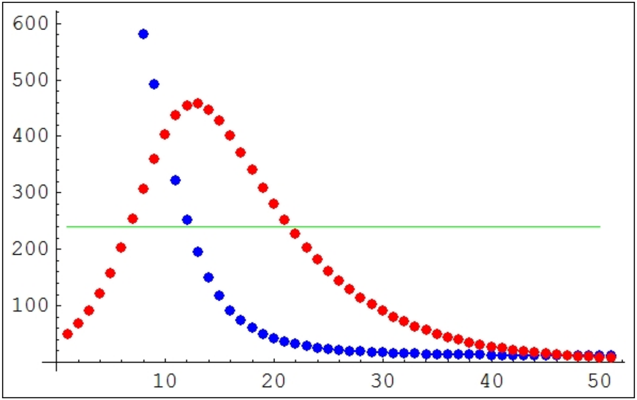


Figura: $N = 1000,\ \ S_0 = 950,\ \ I_0 = 50, \gamma = 0.00050,\ \ q = 0.12$

# Esempio: effetto soglia

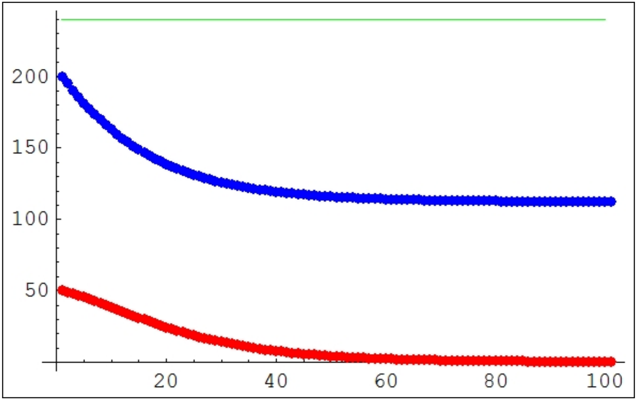


Figura: $N = 1000,\ S_0 = 200,\ I_0 = 50, \gamma = 0.00050,\ q = 0.12$