Il Teorema del Limite Centrale

Lucio Demeio
Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche
Università Politecnica delle Marche

Teorema. *Siano $X_1, X_2, ..., X_n$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite di media μ e varianza σ^2. Sia inoltre*

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \tag{1}$$

la media campionaria. Allora la variabile

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{2}$$

tende, al limite per $n \to \infty$, ad una variabile normale standard, cioè

$$\lim_{n\to\infty} S_n \sim N(0,1).$$

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che

$$E[\overline{X}_n] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right] = \frac{n\,\mu}{n} = \mu$$
$$Var(\overline{X}_n) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{n\,\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Quindi $E[S_n] = 0$ e $Var(S_n) = 1$. Pertanto, se le variabili X_k, $k = 1, 2, ..., n$ sono variabili normali, la tesi è vera per ogni n. Altrimenti, introduciamo le variabili

$$Y_k = \frac{X_k - \mu}{\sigma}, \qquad k = 1, 2, ..., n$$

per le quali abbiamo $E[Y_k] = 0$ e $Var(Y_k) = 1$ e che sono indipendenti come le X_k. Usando le variabili Y_k, la variabile S_n definita dall'equazione (2) si può scrivere come

$$S_n = \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}{\sqrt{n}}.$$

Consideriamo ora la funzione generatrice dei momenti $\phi(t)$, definita dalla relazione

$$\phi(t) = E\left[e^{X\,t}\right].$$

Abbiamo, essendo le Y_k indipendenti e identicamente distribuite,

$$\phi_{S_n}(t) = \phi_{Y_1/\sqrt{n}}(t)\,\phi_{Y_2/\sqrt{n}}(t)\,...\,\phi_{Y_n/\sqrt{n}}(t) = \left[\phi_{Y_1/\sqrt{n}}(t)\right]^n.$$

Sviluppando $\phi_{Y_1/\sqrt{n}}(t)$ in serie di McLaurin attorno a $t = 0$ e usando il fatto che

$$\begin{aligned}
&\phi_{Y_1/\sqrt{n}}(0) = 1 \\
&\phi'_{Y_1/\sqrt{n}}(0) = E[Y_1]/\sqrt{n} = 0 \\
&\phi''_{Y_1/\sqrt{n}}(0) = Var(Y_1/\sqrt{n}) + E[Y_1]^2 = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \phi_{S_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left[\phi_{Y_1/n}(t)\right]^n = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \left[\phi_{Y_1/n}(0) + t\,\phi'_{Y_1/n}(0) + t^2\,\frac{\phi''_{Y_1/n}(0)}{2} + o(t^2)\right]^n = \\
&\quad = \left[1 + \frac{t^2}{2\,n} + o(t^2)\right]^n = e^{t^2/2}
\end{aligned}$$

che è proprio la funzione generatrice dei momenti della funzione di distribuzione di una variabile normale standard.