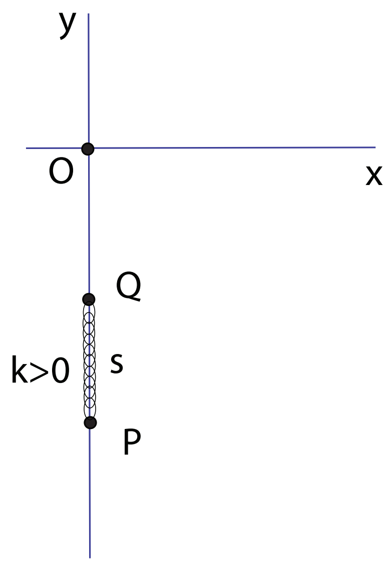
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2012/2013
Meccanica Razionale

Ancona, 11 gennaio 2013

1. Un punto P di massa m si muove senza attrito su una guida verticale. Una molla di costante $k > 0$ lo collega ad un punto Q della guida, che a sua volta si muove sulla guida con legge
$$Q(t) = a\,\sin 2\,\omega\,t,$$
dove $\omega = \sqrt{k/m}$. Determinare il moto di P, se questo inizia il suo moto da fermo in corrispondenza di Q.

Soluzione.



Il sistema ha un grado di libertà, che descriviamo con la coordinata lagrangiana s, la distanza con segno di P da Q. Abbiamo, con $\widehat{\mathbf{j}}$ il versore dell'asse y:

$$\begin{aligned}
&P - O = -(s + Q(t))\,\widehat{\mathbf{j}}\\
&\mathbf{v}(P) = -(\dot{s} + \dot{Q}(t)) = -(\dot{s} +\ 2\,\omega\,a\,\cos 2\,\omega\,t)\,\widehat{\mathbf{j}}\\
&\mathbf{a}(P) = -(\ddot{s} -\ 4\,\omega^2\,a\,\sin 2\,\omega\,t)\,\widehat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

Sul punto P agiscono la forza di gravità e la forza elastica dovuta alla molla. La seconda legge di Newton ci dà:

$$\begin{aligned}
&m\,\mathbf{a}(P) = -m\,g\,\widehat{\mathbf{j}} + k\,s\,\widehat{\mathbf{j}} \qquad \text{cioè}\\
&m\,(\ddot{s} -\ 4\,\omega^2\,a\,\sin 2\,\omega\,t) = m\,g - k\,s\\
&m\,\ddot{s} + k\,s = m\,(g + 4\,\omega^2\,a\,\sin 2\,\omega\,t)\\
&\ddot{s} + \omega^2\,s = g + 4\,\omega^2\,a\,\sin 2\,\omega\,t \qquad (1)
\end{aligned}$$

La soluzione generale dell'ultima equazione è la somma della soluzione generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare. Possiamo cercare la soluzione particolare $s_p(t)$ nella forma (suggerita dal membro di destra)

$$s_p(t) = c_1 + c_2 \sin 2\,\omega\,t.$$

Derivando due volte abbiamo:

$$\begin{aligned}
\dot{s}_p(t) &= 2\,c_2\,\omega\,\cos 2\,\omega\,t \\
\ddot{s}_p(t) &= -4\,c_2\,\omega^2\,\sin 2\,\omega\,t
\end{aligned}$$

che, sostituita nell'equazione differenziale dà

$$\begin{aligned}
-4\,c_2\,\omega^2\,\sin 2\,\omega\,t + \omega^2\,(c_1 + c_2\,\sin 2\,\omega\,t) &= g + 4\,\omega^2\,a\,\sin 2\,\omega\,t \\
-3\,c_2\,\omega^2\,\sin 2\,\omega\,t + \omega^2\,c_1 &= g + 4\,\omega^2\,a\,\sin 2\,\omega\,t,
\end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{g}{\omega^2} \\
c_2 &= -\frac{4\,a}{3}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
s(t) &= A\,\cos\omega\,t + B\,\sin\omega\,t + \frac{g}{\omega^2} - \frac{4\,a}{3}\,\sin 2\,\omega\,t \\
\dot{s}(t) &= -A\,\omega\,\sin\omega\,t + B\,\omega\,\cos\omega\,t - \frac{8\,a\,\omega}{3}\,\cos 2\,\omega\,t
\end{aligned}$$

Le costanti A e B vanno determinate dalle condizioni iniziali. Dal testo si capisce che $s(0) = \mathbf{v}(P)(0) = 0$, vale a dire

$$\begin{aligned}
s(0) &= 0 \\
\dot{s}(0) &= -2\,\omega\,a.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{g}{\omega^2} \\
B &= \frac{2\,a}{3}
\end{aligned}$$

Il moto del punto P è dato dunque da

$$s(t) = -\frac{g}{\omega^2}\,\cos\omega\,t + \frac{2\,a}{3}\,\sin\omega\,t + \frac{g}{\omega^2} - \frac{4\,a}{3}\,\sin 2\,\omega\,t$$

Si può risolvere il problema anche utilizzando le equazioni di Lagrange:

$$\begin{aligned}
&T = \frac{1}{2}\,m\,\mathbf{v}(P)^2 = \frac{1}{2}\,m\,(\dot{s} + \,2\,\omega\,a\,\cos 2\,\omega\,t)^2 \\
&V = -m\,g\,(s + a\,\sin 2\,\omega\,t) + \frac{1}{2}\,k\,s^2 \\
&\mathcal{L} = T - V \\
&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = m\,g - k\,s \\
&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} = m\,(\dot{s} + 2\,\omega\,a\,\cos 2\,\omega\,t)
\end{aligned}$$

e l'equazione di Lagrange per la coordinata s,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0,$$

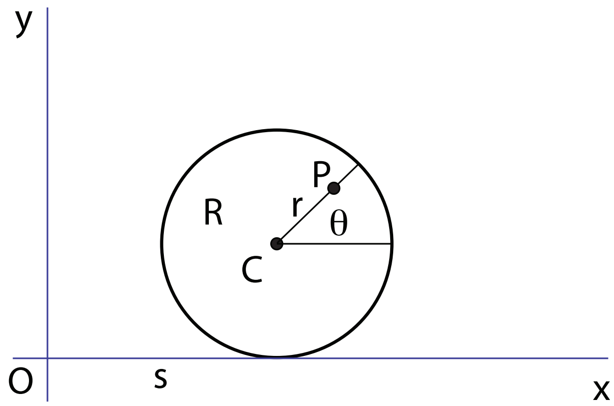
diventa

$$m\,(\ddot{s} - 4\,\omega^2\,a\,\sin 2\,\omega\,t) - m\,g + k\,s = 0.$$

che coincide con l'equazione del moto (1) ricavata con Newton.

2. Un disco di raggio R e centro C rotola senza strisciare su una guida orizzontale; il centro C si muove a velocità costante v. Utilizzando la formula fondamentale dei moti rigidi, determinare la velocità di un punto P del disco situato a distanza $r < R$ dal centro.

Soluzione.



Il sistema ha un grado di libertà, in quanto il vincolo di rotolamento puro è un vincolo integrabile. Se indichiamo con s l'ascissa del centro C e con θ l'angolo di rotazione (come in figura), abbiamo

$$\dot{s} = -R\,\dot{\theta}$$

Inoltre, indicando con $\widehat{\mathbf{i}}$ il versore dell'asse x, con $\widehat{\mathbf{j}}$ il versore dell'asse y e con $\widehat{\mathbf{k}}$ il versore dell'asse z, abbiamo

$$\begin{aligned}
&C - O = s\,\widehat{\mathbf{i}} + R\,\widehat{\mathbf{j}} \\
&\mathbf{v}(C) = \dot{s}\,\widehat{\mathbf{i}} = -R\,\dot{\theta}\,\widehat{\mathbf{i}} \\
&P - C = r\,(\widehat{\mathbf{i}}\,\cos\theta + \widehat{\mathbf{j}}\,\sin\theta) \\
&\omega = \dot{\theta}\,\widehat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

La formula fondamentale dei moti rigidi offre pertanto:

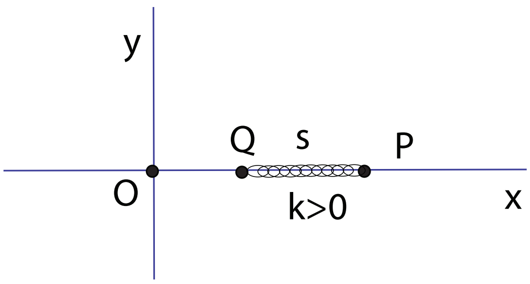
$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(P) &= \mathbf{v}(C) + \omega \times (P - C) = \\
&= -R\,\dot{\theta}\,\widehat{\mathbf{i}} + \dot{\theta}\,\widehat{\mathbf{k}} \times [r\,(\widehat{\mathbf{i}}\,\cos\theta + \widehat{\mathbf{j}}\,\sin\theta)] = \\
&= -R\,\dot{\theta}\,\widehat{\mathbf{i}} + r\,\dot{\theta}\,(\widehat{\mathbf{j}}\,\cos\theta - \widehat{\mathbf{i}}\,\sin\theta) \\
&= \dot{\theta}\,[-(R + r\,\sin\theta)\,\widehat{\mathbf{i}} + r\,\widehat{\mathbf{j}}\,\cos\theta]
\end{aligned}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2012/2013
Meccanica Razionale

Ancona, 11 gennaio 2013

1. Un punto P di massa m si muove senza attrito su una guida orizzontale. Una molla di costante $k > 0$ lo collega ad un punto Q della guida, che a sua volta si muove sulla guida con legge
$$Q(t) = a \sin 2\,\omega\, t,$$
dove $\omega = \sqrt{k/m}$, ed una forza viscosa di costante $\lambda < 2\sqrt{m\,k}$ si oppone al moto. Determinare il moto di P, se questo inizia il suo moto da fermo in corrispondenza di Q.

Soluzione.



Il sistema ha un grado di libertà, che descriviamo con la coordinata lagrangiana s, la distanza con segno di P da Q. Indicando con $\widehat{\mathbf{i}}$ il versore dell'asse x abbiamo, :

$$\begin{aligned}
&P - O = (s + Q(t))\,\widehat{\mathbf{i}}\\
&\mathbf{v}(P) = (\dot{s} + \dot{Q}(t)) = (\dot{s} + \; 2\,\omega\,a\,\cos 2\,\omega\,t)\,\widehat{\mathbf{i}}\\
&\mathbf{a}(P) = (\ddot{s} - \; 4\,\omega^2\,a\,\sin 2\,\omega\,t)\,\widehat{\mathbf{i}}
\end{aligned}$$

Sul punto P agiscono la forza elastica dovuta alla molla e la forza viscosa. La seconda legge di Newton ci dà:

$$\begin{aligned}
&m\,\mathbf{a}(P) = -k\,s\,\widehat{\mathbf{i}} - \lambda \mathbf{v}(P)\widehat{\mathbf{i}} \qquad \text{cioè}\\
&m\,(\ddot{s} - \; 4\,\omega^2\,a\,\sin 2\,\omega\,t) = -k\,s - \lambda\,(\dot{s} + 2\,\omega\,a\,\cos 2\,\omega\,t)\\
&m\,\ddot{s} + \lambda\,\dot{s} + k\,s = 4\,m\,\omega^2\,a\,\sin 2\,\omega\,t - 2\,\lambda\,\omega\,a\,\cos 2\,\omega\,t\\
&\ddot{s} + 2\,\varepsilon\,\dot{s} + \omega^2\,s = 4\,\omega^2\,a\,\sin 2\,\omega\,t - 4\,\varepsilon\,\omega\,a\,\cos 2\,\omega\,t \qquad (2)
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto $\lambda/m = 2\,\varepsilon$. La soluzione generale dell'ultima equazione è la somma della soluzione generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare. La soluzione particolare $s_p(t)$ va cercata nella forma (suggerita dal membro di destra)

$$s_p(t) = c_1\,\cos 2\,\omega\,t + c_2\,\sin 2\,\omega\,t,$$

con le costanti c_1 e c_2 da determinare al solito modo. Posto $\nu = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$ e ponendoci nel caso $\omega > \varepsilon$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
s(t) &= e^{-\varepsilon t}\,(A\,\cos\nu\,t + B\,\sin\nu\,t) + c_1\,\cos 2\,\omega\,t + c_2\,\sin 2\,\omega\,t \\
\dot{s}(t) &= -\varepsilon\,e^{-\varepsilon t}\,(A\,\cos\nu\,t + B\,\sin\nu\,t) + \nu\,e^{-\varepsilon t}\,(-A\,\sin\nu\,t + B\,\cos\nu\,t) \\
&\quad -2\,c_1\,\omega\,\sin 2\,\omega\,t + 2\,c_2\,\omega\,\cos 2\,\omega\,t
\end{aligned}
$$

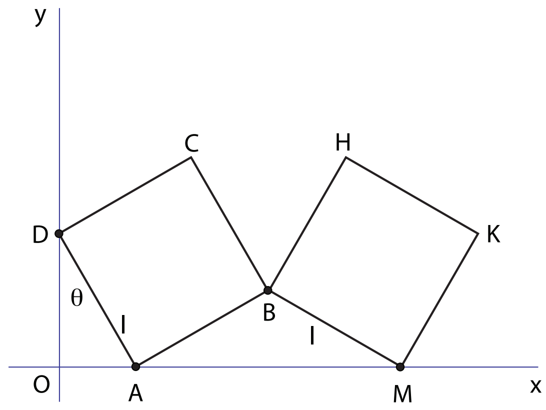
Le costanti A e B vanno determinate dalle condizioni iniziali. Dal testo si capisce che $s(0) = \mathbf{v}(P)(0) = 0$, vale a dire

$$
\begin{aligned}
s(0) &= 0 \\
\dot{s}(0) &= -2\,\omega\,a,
\end{aligned}
$$

che permette di risolvere il problema come nell'esercizio precedente.

2. Due quadrati $ABCD$ e $MBHK$ di lato l si muovono nel piano verticale $O(x,y)$ come in figura. I vertici A ed M scorrono sull'asse x ed il vertice D sull'asse y. I due quadrati possono inoltre ruotare attorno al vertice comune B. Calcolare le traiettorie polari del quadrato $MBHK$.

Soluzione.



Il sistema ha un grado di libertà, descritto dall'angolo θ che il lato AD forma con la verticale. Per determinare le traiettorie polari del secondo quadrato, usiamo la formula fondamentale dei moti rigidi scritta per il centro istantaneo di rotazione, che indichiamo con Q. Siano inoltre x ed y le coordinate di Q nel sistema fisso indicato in figura. Avremo allora

$$0 = \mathbf{v}(Q) = \mathbf{v}(M) + \omega \times (Q - M) \tag{3}$$

Con un po' di trigonometria si vede che

$$\begin{aligned}
&M - O = l\,(\sin\theta + 2\,\cos\theta)\,\widehat{\mathbf{i}}\\
&\mathbf{v}(M) = l\,\dot\theta\,(\cos\theta - 2\,\sin\theta)\,\widehat{\mathbf{i}}\\
&Q - M = Q - O + O - M = x\,\widehat{\mathbf{i}} + y\,\widehat{\mathbf{j}} - l\,(\sin\theta + 2\,\cos\theta)\,\widehat{\mathbf{i}} =\\
&\qquad = [x - l\,(\sin\theta + 2\,\cos\theta)]\,\widehat{\mathbf{i}} + y\,\widehat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

Ricordando che $\omega = -\dot\theta\,\widehat{\mathbf{k}}$, sostituendo nell'equazione ed eseguendo i prodotti vettoriali abbiamo:

$$\begin{aligned}
&l\,\dot\theta\,(\cos\theta - 2\,\sin\theta)\,\widehat{\mathbf{i}} - \dot\theta\,\widehat{\mathbf{k}} \times \{[x - l\,(\sin\theta + 2\,\cos\theta)]\,\widehat{\mathbf{i}} + y\,\widehat{\mathbf{j}}\} = 0\\
&l\,(\cos\theta - 2\,\sin\theta)\,\widehat{\mathbf{i}} - \{[x - l\,(\sin\theta + 2\,\cos\theta)]\,\widehat{\mathbf{j}} - y\,\widehat{\mathbf{i}}\} = 0
\end{aligned}$$

Uguagliando separatamente a zero la componente lungo $\widehat{\mathbf{i}}$ e la componente lungo $\widehat{\mathbf{j}}$ otteniamo l'equazione della base in rappresentazione parametrica:

$$\begin{aligned}
x &= l\,(\sin\theta + 2\,\cos\theta)\\
y &= -l\,(\cos\theta - 2\,\sin\theta)
\end{aligned}$$

da cui risulta facilmente $x^2 + y^2 = 5\,l^2$. La base è pertanto una circonferenza con centro l'origine e raggio $5\,l$.

Per determinare la rulletta, dobbiamo usare ancora l'equazione (3), esprimendo però le grandezze in un sistema solidale. Introduciamo quindi un sistema solidale con origine nel vertice B (ma ogni altra scelta è valida), l'asse x_1 lungo il lato BM e l'asse x_2 lungo BH, ed indichiamo con $\widehat{\mathbf{e}}_1$, $\widehat{\mathbf{e}}_2$ e $\widehat{\mathbf{e}}_3$ i versori degli assi solidali. Si vede facilmente che:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{e}}_1 &= \widehat{\mathbf{i}}\cos\theta - \widehat{\mathbf{j}}\sin\theta \\ \widehat{\mathbf{e}}_2 &= \widehat{\mathbf{i}}\sin\theta + \widehat{\mathbf{j}}\cos\theta\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{i}} &= \widehat{\mathbf{e}}_1\,\cos\theta + \widehat{\mathbf{e}}_2\,\sin\theta \\ \widehat{\mathbf{j}} &= -\widehat{\mathbf{e}}_1\,\sin\theta + \widehat{\mathbf{e}}_2\,\cos\theta\end{aligned}$$

Indichiamo con x_1 ed x_2 le coordinate di Q nel sistema solidale, mentre il punto M ha coordinate $(l, 0)$. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}Q - M &= (x_1 - l)\,\widehat{\mathbf{e}}_1 + x_2\,\widehat{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{v}(M) &= l\,\dot\theta\,(\cos\theta - 2\,\sin\theta)\,\widehat{\mathbf{i}} = \\ &= l\,\dot\theta\,(\cos\theta - 2\,\sin\theta)\,(\widehat{\mathbf{e}}_1\,\cos\theta + \widehat{\mathbf{e}}_2\,\sin\theta)\end{aligned}$$

mentre $\omega = -\dot\theta\,\widehat{\mathbf{k}} = -\dot\theta\,\widehat{\mathbf{e}}_3$. L'equazione (3) diventa dunque:

$$\begin{aligned}&l\,\dot\theta\,(\cos\theta - 2\,\sin\theta)\,(\widehat{\mathbf{e}}_1\,\cos\theta + \widehat{\mathbf{e}}_2\,\sin\theta) - \dot\theta\,\widehat{\mathbf{e}}_3 \times [(x_1 - l)\,\widehat{\mathbf{e}}_1 + x_2\,\widehat{\mathbf{e}}_2] = 0 \\ &l\,(\cos\theta - 2\,\sin\theta)\,(\widehat{\mathbf{e}}_1\,\cos\theta + \widehat{\mathbf{e}}_2\,\sin\theta) - [(x_1 - l)\,\widehat{\mathbf{e}}_2 - x_2\,\widehat{\mathbf{e}}_1] = 0\end{aligned}$$

Uguagliano separatamente a zero le componenti lungo $\widehat{\mathbf{e}}_1$ e $\widehat{\mathbf{e}}_2$ abbiamo

$$\begin{aligned}&l\,(\cos\theta - 2\,\sin\theta)\,\cos\theta + x_2 = 0 \\ &l\,(\cos\theta - 2\,\sin\theta)\,\sin\theta - x_1 + l = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= -l\,(\cos\theta - 2\,\sin\theta)\,\cos\theta = -l\,\left(\frac{1+\cos 2\,\theta}{2} - \sin 2\,\theta\right) \\ x_1 &= l + l\,(\cos\theta - 2\,\sin\theta)\,\sin\theta = l\,\left(\frac{1}{2}\,\sin 2\,\theta + \cos 2\,\theta\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 + \frac{l}{2} &= l\,\left(\sin 2\,\theta - \frac{1}{2}\,\cos 2\,\theta\right) \\ x_1 &= l\,\left(\cos 2\,\theta + \frac{1}{2}\,\sin 2\,\theta\right)\end{aligned}$$

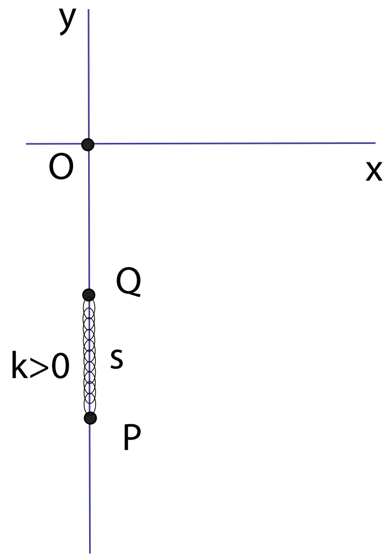
e si vede facilmente che $x_1^2 + (x_2 + l/2)^2 = 5\,l/4$. La rulletta è pertanto una circonferenza con centro il punto $(0, -l/2)$ e raggio $l\,\sqrt{5}/2$.

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2012/2013
Meccanica Razionale

Ancona, 11 gennaio 2013

1. Un punto P di massa m si muove senza attrito su una guida verticale. Una molla di costante $k > 0$ lo collega ad un punto Q della guida, che a sua volta si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v sulla guida e che all'istante iniziale si trova in O. Determinare il moto di P, se questo inizia il suo moto da fermo in corrispondenza di Q.

   Soluzione.



Il sistema ha un grado di libertà, che descriviamo con la coordinata lagrangiana s, la distanza con segno di P da Q. Abbiamo, con $\widehat{\mathbf{j}}$ il versore dell'asse y:

$$
\begin{aligned}
&P - O = -(s + Q(t))\,\widehat{\mathbf{j}} = -(s + v\,t)\,\widehat{\mathbf{j}}\\
&\mathbf{v}(P) = -(\dot{s} + \dot{Q}(t)) = -(\dot{s} + v)\,\widehat{\mathbf{j}}\\
&\mathbf{a}(P) = -\ddot{s}\,\widehat{\mathbf{j}}
\end{aligned}
$$

Sul punto P agiscono la forza di gravità e la forza elastica dovuta alla molla. La seconda legge di Newton ci dà:

$$
\begin{aligned}
&m\,\mathbf{a}(P) = -m\,g\,\widehat{\mathbf{j}} + k\,s\,\widehat{\mathbf{j}} \qquad \text{cioè}\\
&m\,\ddot{s} = m\,g - k\,s\\
&m\,\ddot{s} + k\,s = m\,g\\
&\ddot{s} + \omega^2\,s = g
\end{aligned}
\tag{4}
$$

la soluzione generale è immediata:

$$
\begin{aligned}
&s(t) = A\,\cos\omega\,t + B\,\sin\omega\,t + \frac{g}{\omega^2}\\
&\dot{s}(t) = \omega\,(-A\,\sin\omega\,t + B\,\cos\omega\,t)
\end{aligned}
$$

Le costanti A e B vanno determinate dalle condizioni iniziali. Dal testo si capisce che $s(0) = \mathbf{v}(P)(0) = 0$, vale a dire

$$\begin{aligned} s(0) &= 0 \\ \dot{s}(0) &= -v. \end{aligned}$$

Dunque

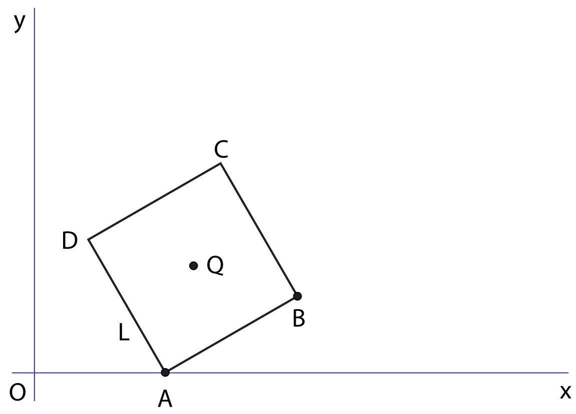
$$\begin{aligned} A &= -\frac{g}{\omega^2} \\ B &= \frac{v}{\omega} \end{aligned}$$

Il moto del punto P è dato dunque da

$$s(t) = -\frac{g}{\omega^2}\,\cos\omega\,t + \frac{v}{\omega}\,\sin\omega\,t + \frac{g}{\omega^2}$$

2. Un quadrato $ABCD$ di lato L si muove su una guida orizzontale; il vertice A scorre senza attrito sulla guida a velocità costante v ed il quadrato ruota attorno ad A con velocità angolare $\omega = v/L$. Utilizzando la formula fondamentale dei moti rigidi, determinare la velocità del centro del quadrato Q.

Soluzione.



Il sistema ha zero gradi di libertà, in quanto i dati del problema determinano univocamente il moto. Comunque, indichiamo con θ l'angolo che il lato AB forma con l'asse x. Indicando con $\widehat{\mathbf{i}}$ il versore dell'asse x, con $\widehat{\mathbf{j}}$ il versore dell'asse y e con $\widehat{\mathbf{k}}$ il versore dell'asse z, abbiamo

$$\begin{aligned}
&A - O = v\,t\,\widehat{\mathbf{i}} \\
&\mathbf{v}(A) = v\,\widehat{\mathbf{i}} \\
&Q - A = \frac{L}{\sqrt{2}}\left[\widehat{\mathbf{i}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \widehat{\mathbf{j}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&\omega = \dot{\theta}\,\widehat{\mathbf{k}} = \frac{v}{L}\,\widehat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

La formula fondamentale dei moti rigidi offre pertanto:

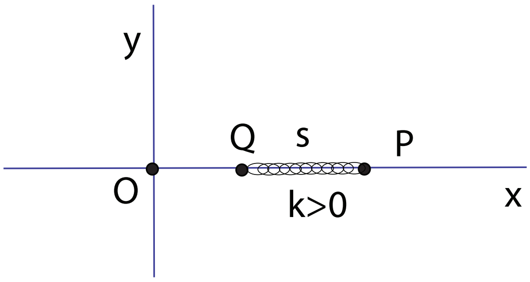
$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(Q) &= \mathbf{v}(A) + \omega \times (Q - A) = \\
&= v\,\widehat{\mathbf{i}} + \frac{L}{\sqrt{2}}\,\dot{\theta}\,\widehat{\mathbf{k}} \times \left[\widehat{\mathbf{i}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \widehat{\mathbf{j}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \\
&= v\,\widehat{\mathbf{i}} + \frac{v}{\sqrt{2}}\left[\widehat{\mathbf{j}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \widehat{\mathbf{i}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= v\,\widehat{\mathbf{i}} + \frac{v}{\sqrt{2}}\left[\widehat{\mathbf{j}}\,\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta - \sin\theta) - \widehat{\mathbf{i}}\,\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \sin\theta)\right] \\
&= v\left\{\left[1 - \frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta)\right]\widehat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}(\cos\theta - \sin\theta)\,\widehat{\mathbf{j}}\right\}
\end{aligned}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2012/2013
Meccanica Razionale

Ancona, 11 gennaio 2013

1. Un punto P di massa m si muove senza attrito su una guida orizzontale. Una molla di costante $k > 0$ lo collega ad un punto Q, che a sua volta si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v sulla guida, ed una forza viscosa di costante $\lambda < 2\sqrt{m\,k}$ si oppone al moto. Determinare il moto di P, se questo inizia il suo moto da fermo in corrispondenza di Q, che si trova nell'origine all'istante iniziale.

   Soluzione.



Il sistema ha un grado di libertà, che descriviamo con la coordinata lagrangiana s, la distanza con segno di P da Q. Abbiamo, con $\hat{\mathbf{j}}$ il versore dell'asse y:

$$\begin{aligned} &P - O = (s + Q(t))\,\hat{\mathbf{i}} \\ &\mathbf{v}(P) = (\dot{s} + \dot{Q}(t)) = (\dot{s} + v)\,\hat{\mathbf{i}} \\ &\mathbf{a}(P) = \ddot{s}\,\hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Sul punto P agiscono la forza elastica dovuta alla molla e la forza viscosa. La seconda legge di Newton ci dà:

$$\begin{aligned} &m\,\mathbf{a}(P) = -k\,s\,\hat{\mathbf{i}} - \lambda \mathbf{v}(P)\hat{\mathbf{i}} \qquad \text{cioè} \\ &m\,\ddot{s} = -k\,s - \lambda\,(\dot{s} + v) \\ &m\,\ddot{s} + \lambda\,\dot{s} + k\,s = -\lambda\,v \\ &\ddot{s} + 2\,\varepsilon\,\dot{s} + \omega^2\,s = -2\,\varepsilon\,v \end{aligned} \tag{5}$$

dove abbiamo posto $\lambda/m = 2\,\varepsilon$. La soluzione generale dell'ultima equazione è immediata:

$$\begin{aligned} &s(t) = e^{-\varepsilon\,t}\,(A\,\cos\nu\,t + B\,\sin\nu\,t) - \frac{2\,\varepsilon\,v}{\omega^2} \\ &\dot{s}(t) = -\varepsilon\,e^{-\varepsilon\,t}\,(A\,\cos\nu\,t + B\,\sin\nu\,t) + \nu\,e^{-\varepsilon\,t}\,(-A\,\sin\nu\,t + B\,\cos\nu\,t) \end{aligned}$$

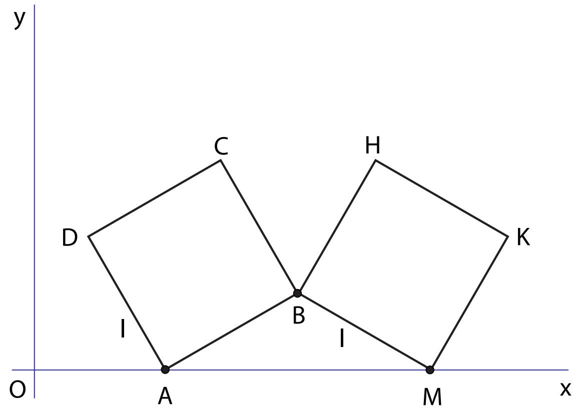
Le costanti A e B vanno determinate dalle condizioni iniziali. Dal testo si capisce che $s(0) = \mathbf{v}(P)(0) = 0$, vale a dire

$$\begin{aligned} &s(0) = 0 \\ &\dot{s}(0) = -v, \end{aligned}$$

che permette di risolvere il problema come nei precedenti esercizi.

2. Due quadrati $ABCD$ e $MBHK$ di lato l si muovono nel piano verticale $O(x, y)$ come in figura, con i vertici A ed M che scorrono sull'asse x a velocità costante v. Il quadrato $ABCD$ ruota attorno al vertice A con velocità angolare costante $\omega = v/l$ ed i due quadrati ruotano attorno al vertice comune B. Calcolare le traiettorie polari del quadrato $MBHK$.

Soluzione.



Il sistema ha zero gradi di libertà, in quanto il suo moto è univocamente determinato dai dati del problema. Indichiamo comunque con θ l'angolo che il lato AB forma con l'asse x. Per determinare le traiettorie polari del secondo quadrato, usiamo la formula fondamentale dei moti rigidi scritta per il centro istantaneo di rotazione, che indichiamo con Q. Siano inoltre x ed y le coordinate di Q nel sistema fisso indicato in figura. Avremo allora

$$0 = \mathbf{v}(Q) = \mathbf{v}(M) + \omega \times (Q - M). \tag{6}$$

Dai dati del problema possiamo porre $A - O = v\,t\,\widehat{\mathbf{i}}$, $\dot{\theta} = \omega$ e $\theta = \omega\,t = (v/l)\,t$. Attenzione, la velocità angolare vettoriale del secondo quadrato è $\omega = -\omega\,\widehat{\mathbf{k}}$. Con un po' di trigonometria si vede che

$$\begin{aligned}
&M - O = (v\,t + 2\,l\,\cos\theta)\,\widehat{\mathbf{i}}\\
&\mathbf{v}(M) = (v - 2\,l\,\dot{\theta}\,\sin\theta)\,\widehat{\mathbf{i}} = (v - 2\,l\,\omega\,\sin\theta)\,\widehat{\mathbf{i}} = v\,(1 - 2\,\sin\theta)\,\widehat{\mathbf{i}}\\
&Q - M = Q - O + O - M = (x\,\widehat{\mathbf{i}} + y\,\widehat{\mathbf{j}}) - (v\,t + 2\,l\,\cos\theta)\,\widehat{\mathbf{i}} =\\
&\qquad = [x - (v\,t + 2\,l\,\cos\theta)]\,\widehat{\mathbf{i}} + y\,\widehat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione, ricordando che $\omega = v/l$ ed eseguendo i prodotti vettoriali abbiamo:

$$\begin{aligned}
&v\,(1 - 2\,\sin\theta)\,\widehat{\mathbf{i}} - \omega\,\widehat{\mathbf{k}} \times \{[x - (v\,t + 2\,l\,\cos\theta)]\,\widehat{\mathbf{i}} + y\,\widehat{\mathbf{j}}\} = 0\\
&l\,(1 - 2\,\sin\theta)\,\widehat{\mathbf{i}} - \{[x - (v\,t + 2\,l\,\cos\theta)]\,\widehat{\mathbf{j}} - y\,\widehat{\mathbf{i}}\} = 0
\end{aligned}$$

Uguagliando separatamente a zero la componente lungo $\widehat{\mathbf{i}}$ e la componente lungo $\widehat{\mathbf{j}}$ otteniamo l'equazione della base in rappresentazione parametrica:

$$\begin{aligned}
x &= v\,t + 2\,l\,\cos\theta\\
y &= -l\,(1 - 2\,\sin\theta)
\end{aligned}$$

da cui risulta facilmente $(x - v\,t)^2 + (y + l)^2 = 4\,l^2$. La base è pertanto una circonferenza di centro il punto mobile $(vt, -l)$ e raggio $2\,l$.

Per determinare la rulletta, dobbiamo usare ancora l'equazione (6), esprimendo però le grandezze in un sistema solidale. Introduciamo quindi un sistema solidale con origine nel vertice B (ma ogni altra scelta è valida), l'asse x_1 lungo il lato BM e l'asse x_2 lungo BH, ed indichiamo con $\widehat{\mathbf{e}}_1$, $\widehat{\mathbf{e}}_2$ e $\widehat{\mathbf{e}}_3$ i versori degli assi solidali. Si vede facilmente che:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{e}}_1 &= \widehat{\mathbf{i}} \cos\theta - \widehat{\mathbf{j}} \sin\theta \\
\widehat{\mathbf{e}}_2 &= \widehat{\mathbf{i}} \sin\theta + \widehat{\mathbf{j}} \cos\theta
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{i}} &= \widehat{\mathbf{e}}_1 \cos\theta + \widehat{\mathbf{e}}_2 \sin\theta \\
\widehat{\mathbf{j}} &= -\widehat{\mathbf{e}}_1 \sin\theta + \widehat{\mathbf{e}}_2 \cos\theta
\end{aligned}
$$

Indichiamo con x_1 ed x_2 le coordinate di Q nel sistema solidale, mentre il punto M ha coordinate $(l, 0)$. Abbiamo dunque

$$
\begin{aligned}
&Q - M = (x_1 - l)\,\widehat{\mathbf{e}}_1 + x_2\,\widehat{\mathbf{e}}_2 \\
&\mathbf{v}(M) = v\,(1 - 2\,\sin\theta)\,\widehat{\mathbf{i}} = v\,(1 - 2\,\sin\theta)\,(\widehat{\mathbf{e}}_1 \cos\theta + \widehat{\mathbf{e}}_2 \sin\theta)
\end{aligned}
$$

mentre $\omega = -\omega\,\widehat{\mathbf{k}} = -\omega\,\widehat{\mathbf{e}}_3$. L'equazione (6) diventa dunque:

$$
\begin{aligned}
&v\,(1 - 2\,\sin\theta)\,(\widehat{\mathbf{e}}_1 \cos\theta + \widehat{\mathbf{e}}_2 \sin\theta) - \omega\,\widehat{\mathbf{e}}_3 \times [(x_1 - l)\,\widehat{\mathbf{e}}_1 + x_2\,\widehat{\mathbf{e}}_2] = 0 \\
&l\,(1 - 2\,\sin\theta)\,(\widehat{\mathbf{e}}_1 \cos\theta + \widehat{\mathbf{e}}_2 \sin\theta) - [(x_1 - l)\,\widehat{\mathbf{e}}_2 - x_2\,\widehat{\mathbf{e}}_1] = 0
\end{aligned}
$$

Uguagliano separatamente a zero le componenti lungo $\widehat{\mathbf{e}}_1$ e $\widehat{\mathbf{e}}_2$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
&l\,(1 - 2\,\sin\theta)\,\cos\theta + x_2 = 0 \\
&l\,(1 - 2\,\sin\theta)\,\sin\theta - (x_1 - l) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= -l\,(1 - 2\,\sin\theta)\,\cos\theta \\
x_1 - l &= l\,(1 - 2\,\sin\theta)\,\sin\theta
\end{aligned}
$$

che dà la rappresentazione parametrica della rulletta. Questa curva non è interpretabile come una curva elementare nota.