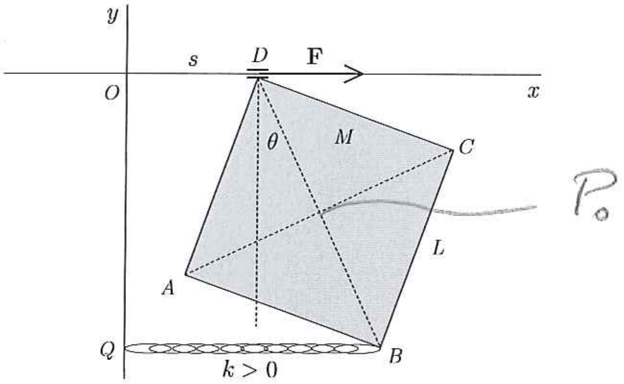
Una lamina quadrata $ABCD$ di massa M e lato L si muove nel piano verticale $O(x,y)$. Il vertice D scorre senza attrito sull'asse x e la lamina è libera di ruotare attorno ad esso. Il vertice B, opposto a D, è collegato alla sua proiezione Q sull'asse y da una molla di costante $k > 0$. Inoltre, una forza costante $\mathbf{F} = F\,\hat{\mathbf{i}}$, diretta nel verso positivo dell'asse x, agisce sul vertice D. Determinare le configurazioni di equilibrio della lamina e studiarne la stabilità, scegliendo come coordinate lagrangiane s e θ, rispettivamente l'ascissa di D e l'angolo che la diagonale DB forma con la verticale.

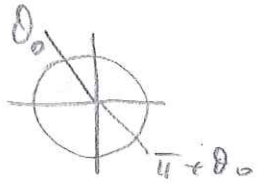


$$P_0 - O = \left(s + L\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\hat{i} - L\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\,\hat{j}$$

$$V = V_g + V_k + V_F = -MgL\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(s + L\sqrt{2}\sin\theta\right)^2 - Fs$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial s} = k\left(s + L\sqrt{2}\sin\theta\right) - F \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial \theta} = MgL\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta + k\left(s + L\sqrt{2}\sin\theta\right)L\sqrt{2}\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} k\left(s + L\sqrt{2}\sin\theta\right) = F \\[2ex] MgL\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta + FL\sqrt{2}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\tan\theta = -\frac{2F}{Mg}$$



$$\theta_1 = \theta_0 \qquad \theta_2 = \pi + \theta_0$$

$$s = \frac{F}{k} - L\sqrt{2}\sin\theta \qquad s_1 = \frac{F}{k} - L\sqrt{2}\sin\theta_0 \qquad s_2 = \frac{F}{k} + L\sqrt{2}\sin\theta_0$$

$$Q_1 = \left(\frac{F}{k} - L\sqrt{2}\sin\theta_0,\ \theta_0\right) \qquad Q_2 = \left(\frac{F}{k} + L\sqrt{2}\sin\theta_0,\ \pi + \theta_0\right)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = k \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s\,\partial\theta} = kL\sqrt{2}\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = MgL\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - k\left(s + L\sqrt{2}\sin\theta\right)L\sqrt{2}\sin\theta + kL^2\cdot 2\cos^2\theta =$$

$$\text{(all'equilibrio)} = MgL\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - FL\sqrt{2}\sin\theta + 2kL^2\cos^2\theta$$

$$H = \begin{pmatrix} V_{ss} & V_{s\theta} \\ V_{s\theta} & V_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

$$\det(H) = k\left\{ MgL\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - FL\sqrt{2}\sin\theta + \cancel{2kL^2\cos^2\theta}\right\} - \cancel{2k^2L^2\cos^2\theta} =$$

$$= kL\sqrt{2}\,\frac{Mg}{2}\left(1 - \frac{2F}{Mg}\tan\theta\right)\cos\theta = \quad \text{(all'equilibrio)}$$

$$= \frac{MgkL}{\sqrt{2}}\,(1+1)\cos\theta = MgkL\sqrt{2}\cos\theta$$

In Q_1: $\theta = \theta_1 = \theta_0$ e $\cos\theta_1 < 0 \Rightarrow \det(H) < 0$ INST.

In Q_2: $\theta = \theta_2 = \pi + \theta_0$ e $\cos\theta_2 > 0 \Rightarrow \det(H) > 0$ STAB.