Equazioni di Eulero del corpo rigido.

In questa nota vogliamo scrivere e studiare le equazioni del moto di un corpo rigido libero, sottoposto alla sola forza di gravità. Ci occuperemo in particolare delle rotazioni stazionarie e della loro stabilità: moti, cioè,che corrispondono ad una rotazione attorno ad un asse fisso con velocità angolare costante e stabili rispetto a piccole perturbazioni. Lo faremo usando le equazioni cardinali della dinamica per il corpo rigido.

Una **rotazione stazionaria** attorno ad un asse è un moto del corpo rigido in cui la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ è costante in direzione, modulo e verso; la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ è l'asse di rotazione. Una rotazione stazionaria si dice **stabile** se, perturbando di poco la velocità angolare, la deviazione dal valore costante della rotazione stazionaria rimane limitata nel tempo; se invece tale deviazione tende a crescere con il tempo, la rotazione stazionaria si dice **instabile**.

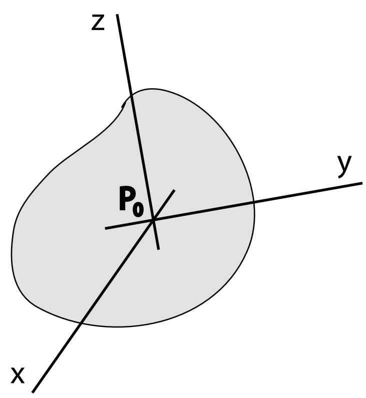

Figura 1: Il corpo rigido ed il sistema solidale

Consideriamo il sistema rigido in figura e sia P_0 il suo centro di massa. Sia $P_0(x, y, z)$ un sistema di riferimento solidale e principale d'inerzia con origine nel centro di massa. La matrice d'inerzia ha la forma

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

e, nel seguito, supporremo che

$$I_1 > I_2 > I_3. \tag{1}$$

Nel caso che almeno due dei momenti principali d'inerzia siano uguali, esistono infinite terne principali d'inerzia.

Il momento angolare rispetto al centro di massa è dato da

$$\mathbf{K}(P_0) = \mathbf{I}\,\boldsymbol{\omega} = I_1\,\omega_1\,\widehat{\mathbf{i}} + I_2\,\omega_2\,\widehat{\mathbf{j}} + I_3\,\omega_3\,\widehat{\mathbf{k}}$$

dove $\widehat{\mathbf{i}}$, $\widehat{\mathbf{j}}$ e $\widehat{\mathbf{k}}$ sono i versori degli assi solidali e ω_1, ω_2 e ω_3 sono le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ lungo i tre assi solidali. Le equazioni cardinali della dinamica per questo sistema sono

$$m\,\mathbf{a}_0 = m\mathbf{g} \tag{2}$$

$$\dot{\mathbf{K}}(P_0) = \mathbf{M}^{(e)}(P_0) \tag{3}$$

Ma l'unica forza che agisce sul corpo è la gravità, che viene rappresentata da un vettore applicato al centro di massa, quindi $\mathbf{M}^{(e)}(P_0) = 0$; inoltre, la prima delle equazioni cardinali descrive semplicemente la caduta libera del centro di massa. Le rotazioni del corpo sono pertanto descritte dall'equazione $\dot{\mathbf{K}}(P_0) = 0$, vale a dire:

$$\frac{d}{dt}(I_1\,\omega_1\widehat{\mathbf{i}} + I_2\,\omega_2\widehat{\mathbf{j}} + I_3\,\omega_3\widehat{\mathbf{k}}) = 0.$$

Derivando esplicitamente ed usando le formule di Poisson abbiamo:

$$\begin{aligned}
&I_1\,(\dot{\omega}_1\,\widehat{\mathbf{i}} + \omega_1\,\dot{\widehat{\mathbf{i}}}) + I_2\,(\dot{\omega}_2\,\widehat{\mathbf{j}} + \omega_2\,\dot{\widehat{\mathbf{j}}}) + I_3\,(\dot{\omega}_3\,\widehat{\mathbf{k}} + \omega_3\,\dot{\widehat{\mathbf{k}}}) = 0\\
&I_1\,\dot{\omega}_1\,\widehat{\mathbf{i}} + I_2\,\dot{\omega}_2\,\widehat{\mathbf{j}} + I_3\,\dot{\omega}_3\,\widehat{\mathbf{k}} + \boldsymbol{\omega}\times(I_1\,\omega_1\,\widehat{\mathbf{i}} + I_2\,\omega_2\,\widehat{\mathbf{j}} + I_3\,\omega_3\,\widehat{\mathbf{k}}) = 0\\
&I_1\,\dot{\omega}_1\,\widehat{\mathbf{i}} + I_2\,\dot{\omega}_2\,\widehat{\mathbf{j}} + I_3\,\dot{\omega}_3\,\widehat{\mathbf{k}} +\\
&\quad +(\omega_1\,\widehat{\mathbf{i}} + \omega_2\,\widehat{\mathbf{j}} + \omega_3\,\widehat{\mathbf{k}})\times(I_1\,\omega_1\,\widehat{\mathbf{i}} + I_2\,\omega_2\,\widehat{\mathbf{j}} + I_3\,\omega_3\,\widehat{\mathbf{k}}) = 0
\end{aligned}$$

Svolgendo i prodotti vettoriali fra i versori si ottiene

$$\begin{aligned}
&[I_1\,\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3\,(I_3 - I_2)]\,\widehat{\mathbf{i}} + [I_2\,\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\,(I_1 - I_3)]\,\widehat{\mathbf{j}} +\\
&\quad +[I_3\,\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2\,(I_2 - I_1)]\,\widehat{\mathbf{k}} = 0
\end{aligned}$$

Proiettando lungo le tre direzioni otteniamo le **equazioni di Eulero**:

$$I_1\,\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\,\omega_2\,\omega_3 \tag{4}$$

$$I_2\,\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\,\omega_1\,\omega_3 \tag{5}$$

$$I_3\,\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\,\omega_1\,\omega_2 \tag{6}$$

Una rotazione stazionaria attorno ad un asse qualsiasi è caratterizzata da $\boldsymbol{\omega} =$ costante, e quindi $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$. Vale a dire

$$(I_2 - I_3)\,\omega_2\,\omega_3 = 0 \tag{7}$$

$$(I_3 - I_1)\,\omega_1\,\omega_3 = 0 \tag{8}$$

$$(I_1 - I_2)\,\omega_1\,\omega_2 = 0 \tag{9}$$

Se i momenti principali d'inerzia sono tutti diversi, come supposto all'inizio, queste tre equazioni hanno soluzioni solo se almeno due delle componenti della velocità angolare sono uguali a zero, altrimenti almeno una delle equazioni non sarebbe soddisfatta. Quindi, **una rotazione stazionaria è possibile solo attorno ad uno degli assi principali d'inerzia**, con $\boldsymbol{\omega} = \Omega\,\widehat{\mathbf{i}}$ per una rotazione attorno all'asse x, $\boldsymbol{\omega} = \Omega\,\widehat{\mathbf{j}}$ per una rotazione attorno all'asse y e $\boldsymbol{\omega} = \Omega\,\widehat{\mathbf{k}}$ per una rotazione attorno all'asse z.

Studiamo ora la stabilità delle rotazioni stazionarie attorno ai tre assi principali.

Rotazione attorno all'asse x. Sia $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\widehat{\mathbf{i}}$ la velocità angolare (costante) che caratterizza la rotazione stazionaria e sia

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \varepsilon\,(\alpha_1(t)\,\widehat{\mathbf{i}} + \alpha_2(t)\,\widehat{\mathbf{j}} + \alpha_3(t)\,\widehat{\mathbf{k}}) \tag{10}$$

la velocità angolare perturbata. Il parametro ε va interpretato come un parametro piccolo, e nello studio della stabilità trascureremo termini del secondo ordine in ε. Sostituendo l'espressione (10) nelle equazioni di Eulero (4)-(6) otteniamo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\, I_1\, \dot{\alpha}_1 &= (I_2 - I_3)\,\varepsilon^2 \alpha_2 \alpha_3 \\
\varepsilon\, I_2\, \dot{\alpha}_2 &= (I_3 - I_1)\,(\Omega + \varepsilon\alpha_1)\,\varepsilon\alpha_3 \\
\varepsilon\, I_3\, \dot{\alpha}_3 &= (I_1 - I_2)\,(\Omega + \varepsilon\alpha_1)\,\varepsilon\alpha_2
\end{aligned}$$

che, semplificando per ε e dividendo ciascuna equazione per il momento d'inerzia corrispondente, diventa

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}\,\varepsilon\alpha_2\alpha_3 \tag{11}$$

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\,(\Omega + \varepsilon\alpha_1)\,\alpha_3 \tag{12}$$

$$\dot{\alpha}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\,(\Omega + \varepsilon\alpha_1)\,\alpha_2 \tag{13}$$

la prima equazione ci dice che la componente della perturbazione lungo $\widehat{\mathbf{i}}$, cioè lungo la direzione della rotazione stazionaria, è proporzionale ad ε, quindi è piccola, o del primo ordine in ε. Le altre due equazioni, se trascuriamo termini di ordine ε, diventano invece

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\,\Omega\,\alpha_3 \tag{14}$$

$$\dot{\alpha}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\,\Omega\,\alpha_2 \tag{15}$$

che costituiscono un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine per $\alpha_1(t)$ e per $\alpha_2(t)$. Derivando la (14) rispetto al tempo e sostituendo $\dot{\alpha}_3$ dalla (15), otteniamo

$$\ddot{\alpha}_2 = \Omega^2\,\frac{(I_3 - I_1)\,(I_1 - I_2)}{I_2\,I_3}\,\alpha_2 \tag{16}$$

Ricordando l'ordinamento (1) dei momenti principali d'inerzia, abbiamo che

$$\frac{(I_3 - I_1)\,(I_1 - I_2)}{I_2\,I_3} < 0.$$

Poniamo pertanto

$$\Lambda^2 = \frac{(I_1 - I_3)\,(I_1 - I_2)}{I_2\,I_3}$$

ottenendo così alfine

$$\ddot{\alpha}_2 + \Omega^2\,\Lambda^2\,\alpha_2 = 0 \tag{17}$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico. La soluzione è una funzione oscillante del tempo, è pertanto limitata, e la rotazione stazionaria attorno all'asse x è stabile.

Rotazione attorno all'asse y. Sia ora $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\widehat{\mathbf{j}}$ la velocità angolare che caratterizza la rotazione stazionaria e sia nuovamente (vedi (10))

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \varepsilon\,(\alpha_1(t)\,\widehat{\mathbf{i}} + \alpha_2(t)\,\widehat{\mathbf{j}} + \alpha_3(t)\,\widehat{\mathbf{k}})$$

la velocità angolare perturbata. Procedendo come nel caso precedente, sostituiamo nelle equazioni di Eulero (4)-(6), semplifichiamo per ε e dividiamo per il momento principale per ottenere:

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_1}\,(\Omega + \varepsilon\,\alpha_2)\,\alpha_3 \\
\dot{\alpha}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_2}\,\varepsilon\,\alpha_1\,\alpha_3 \\
\dot{\alpha}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_3}\,\alpha_1\,(\Omega + \varepsilon\,\alpha_2)
\end{aligned}$$

Come nel caso precedente, la seconda equazione dice che la componente della perturbazione lungo $\widehat{\mathbf{j}}$, cioè lungo la direzione della rotazione stazionaria, è proporzionale ad ε, quindi è piccola, o del primo ordine in ε. Le altre due equazioni, trascurando termini di ordine ε, diventano

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}\,\Omega\,\alpha_3 \tag{18}$$

$$\dot{\alpha}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\,\Omega\,\alpha_1. \tag{19}$$

Derivando la (18) rispetto al tempo e sostituendo $\dot{\alpha}_3$ dalla (19), otteniamo

$$\ddot{\alpha}_1 = \Omega^2\,\frac{(I_2 - I_3)\,(I_1 - I_2)}{I_1\,I_3}\,\alpha_1 \tag{20}$$

Ricordando l'ordinamento (1) dei momenti principali d'inerzia, abbiamo che

$$\frac{(I_2 - I_3)\,(I_1 - I_2)}{I_2\,I_3} > 0.$$

Poniamo pertanto

$$\Lambda^2 = \frac{(I_2 - I_3)\,(I_1 - I_2)}{I_2\,I_3}$$

ottenendo così alfine

$$\ddot{\alpha}_2 - \Omega^2\,\Lambda^2\,\alpha_2 = 0 \tag{21}$$

le cui soluzioni sono iperboliche, una delle quali non limitata. La rotazione stazionaria attorno all'asse y è pertanto instabile.

Rotazione attorno all'asse z. Sia ora $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\widehat{\mathbf{k}}$ la velocità angolare della rotazione stazionaria con

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \varepsilon\,(\alpha_1(t)\,\widehat{\mathbf{i}} + \alpha_2(t)\,\widehat{\mathbf{j}} + \alpha_3(t)\,\widehat{\mathbf{k}})$$

la velocità angolare perturbata. Sostituendo nelle equazioni di Eulero (4)-(6) otteniamo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\, I_1\, \dot\alpha_1 &= (I_2 - I_3)\,\varepsilon\alpha_2(\Omega + \varepsilon\alpha_3)\\
\varepsilon\, I_2\, \dot\alpha_2 &= (I_3 - I_1)\,\varepsilon\,\alpha_1(\Omega + \varepsilon\alpha_3)\\
\varepsilon\, I_3\, \dot\alpha_3 &= (I_1 - I_2)\,\varepsilon^2\alpha_1\alpha_2
\end{aligned}$$

che, semplificando per ε e dividendo ciascuna equazione per il momento d'inerzia al membro di sinistra, diventa

$$\dot\alpha_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}\,\alpha_2(\Omega + \varepsilon\alpha_3) \tag{22}$$

$$\dot\alpha_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\,\alpha_1(\Omega + \varepsilon\alpha_3) \tag{23}$$

$$\dot\alpha_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\,\varepsilon\alpha_1\alpha_2 \tag{24}$$

La terza equazione ci dice nuovamente che la componente della perturbazione lungo $\widehat{\mathbf{k}}$, cioè lungo la direzione della rotazione stazionaria, è proporzionale ad ε, quindi è piccola, o del primo ordine in ε. Le altre due equazioni, trascurando termini di ordine ε, diventano invece

$$\dot\alpha_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}\,\Omega\,\alpha_2 \tag{25}$$

$$\dot\alpha_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\,\Omega\,\alpha_1 \tag{26}$$

Derivando la (25) rispetto al tempo e sostituendo $\dot\alpha_2$ dalla (26), otteniamo

$$\ddot\alpha_1 = \Omega^2\,\frac{(I_2 - I_3)\,(I_3 - I_1)}{I_1\,I_2}\,\alpha_1 \tag{27}$$

Ricordando l'ordinamento (1) dei momenti principali d'inerzia, abbiamo che

$$\frac{(I_2 - I_3)\,(I_3 - I_1)}{I_1\,I_2} < 0.$$

Poniamo pertanto

$$\Lambda^2 = \frac{(I_2 - I_3)\,(I_1 - I_3)}{I_1\,I_2}$$

ottenendo così alfine

$$\ddot\alpha_1 + \Omega^2\,\Lambda^2\,\alpha_1 = 0 \tag{28}$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico. Anche la rotazione stazionaria attorno all'asse z è quindi stabile.

Conclusioni.

- Le sole rotazioni stazionarie possibili sono attorno agli assi principali d'inerzia;
- le rotazioni stazionarie stabili sono quelle attorno agli assi con i momenti d'inerzia estremi (minimo e massimo); le rotazioni stazionarie attorno all'asse con momento d'inerzia intermedio sono invece instabili.